

# 基于秩 1 的射影重建方法

刘侍刚<sup>1,2</sup>, 彭亚丽<sup>2</sup>, 韩崇昭<sup>1</sup>, 吴成柯<sup>2</sup>

(1. 西安交通大学电子与信息工程学院, 陕西西安 710049; 2. 陕西师范大学计算机科学学院, 陕西西安 710062)

**摘 要:** 提出了一种能够将所有图像平等看待基于秩 1 的射影重建方法, 该方法并不是直接求解射影空间结构点和投影矩阵, 而是求解射影空间结构点的深度因子及投影矩阵. 本文利用射影空间结构点可以由图像点及深度因子构成的特性, 构造了一个秩为 1 的矩阵, 用线性迭代的方法求取空间结构点的深度因子, 最后完成射影重建. 模拟实验和真实实验数据结果表明, 该射影重建方法具有收敛性好、重投影误差小及运行速度快等优点.

**关键词:** 射影重建; 线性迭代; 秩 1

**中图分类号:** TP391.41, P232 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2009) 01-0225-04

## Projective Reconstruction Based on Rank 1 Matrix

LIU Shi-gang<sup>1,2</sup>, PENG Ya-li<sup>2</sup>, HAN Chong-zhao<sup>1</sup>, WU Cheng-ke<sup>2</sup>

(1. School of Electronics and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, Shaanxi 710049, China;

2. School of Computer Science, Shaanxi Normal University, Xi'an, Shaanxi 710062, China)

**Abstract:** A linear iterative method for projective reconstruction based on rank 1 matrix containing the images of all points in all views, which can deal with all the images in a unified manner, is presented in the paper. In the method, the unknowns are the 3D motion and relative depths of the set of points, not their 3D positions. The coordinates of the points along the camera plane are given by their image positions. The knowledge of the coordinates enables us to solve the projective reconstruction problem by the linear iterative method based on the rank 1 matrix. Experiments with both simulated and real data show that the method for projective reconstruction has good property of convergence, computational cost and projective errors.

**Key words:** projective reconstruction; linear iteration; rank 1

## 1 引言

射影重建是欧氏重建的必要阶段, 其精确性将影响最终的重建结果. 目前, 它仍然是计算机视觉领域中的研究热点之一<sup>[1]</sup>.

现有的射影重建方法大部分都是基于多线性约束关系<sup>[2]</sup>. 其中 Vidal 等人利用对极几何约束关系对多个物体进行射影重建<sup>[3]</sup>; Martinec 和 Pajdla 利用三线性约束关系对存在遮挡的物体进行射影重建<sup>[4]</sup>. 利用多线性约束关系进行射影重建的缺点主要有两方面: 1. 它仅能够利用 2 幅至 4 幅图像, 而不能利用更多的图像; 2. 没有把所有的图像平等地看待, 而是倚重于某些图像.

为了克服上述缺点, 基于 Tomasi-Kanade<sup>[5]</sup> 正交投影分解算法的思想, Sturm 利用分解算法来进行射影重建<sup>[6]</sup>. 但该方法在进行分解之前, 各个图像点的深度因子必须要事先求到, 而深度因子的求解又要利用对极几

何约束关系, 这样, 又遇到了前面所述的问题. 文献[7, 8]提出了线性迭代射影重建方法, 但这些方法并没有将图像平等地看待. Heyden 提出了一种基于子空间的射影重建方法<sup>[9]</sup>, 但该方法在重建过程中需要对一个秩为 4 的矩阵进行奇异值分解.

本文针对上述缺点, 提出了一种能够将所有图像平等看待, 基于秩 1 的线性迭代射影重建方法, 该方法并不是直接求解射影空间结构点, 而是利用射影空间结构点可以由图像点及深度因子构成的特性, 构造了一个秩为 1 的矩阵, 并利用该矩阵, 线性迭代地求解射影空间结构点的深度因子, 最后完成射影重建.

## 2 射影重建的描述

本文假定摄像机模型为经典的针孔模型, 即成像过程可以用下式表示  $m = PX$  (1)

式中  $X = [x \ y \ z \ 1]^T$  表示三维空间点的齐次坐标,

收稿日期: 2007-01-20; 修回日期: 2008-04-20

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 60805016); 中国博士后科学基金 (No. 20080430201); 高等学校博士学科点专项科研基金新教师基金课题 (No. 200807181007); 国家 973 重点基础研究发展规划 (No. 2007CB311006); 江苏省自然科学基金 (No. BK2007560)

$m = [u \ v \ 1]^T$  为对应的图像平面点的齐次坐标, 为图像的深度因子;  $P$  为摄像机的投影矩阵.

设有  $m$  幅图像, 每幅图像上有  $n$  个对应的图像点, 则上式可以写为

$$m_{i,j} = P_i X_j \quad (2)$$

式中  $i (i = 1, 2, \dots, m)$  表示第  $i$  幅图像,  $j (j = 1, 2, \dots, n)$  表示第  $j$  个图像点.

将所有空间点的齐次坐标表示成一个矩阵

$$X = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ \dots \ X_n] \quad (3)$$

同样, 对于第  $i$  幅图像上所有图像点及深度因子也有下式

$$m_i = [m_{i,1} \ m_{i,2} \ m_{i,3} \ \dots \ m_{i,n}] \quad (4)$$

$$= \text{diag} \begin{pmatrix} i,1 & i,2 & \dots & i,n \end{pmatrix} \quad (5)$$

根据式(2), 则有  $m_{i,j} = P_i X_j$  (6)

从式(6)可以看出, 对于任何非奇异矩阵  $T$ , 都有

$$m_{i,j} = P_i X_j = P_i T^{-1} T X_j = P_i X_j \quad (7)$$

式中  $P_i = P_i T^{-1}$ ,  $X_j = T X_j$ .

即, 对于一组图像点序列  $m$ , 如果存在一组重建  $P_i$  和  $X$ , 则同样存在另一组重建  $P_i$  和  $X$ . 对于无穷多的非奇异矩阵  $T$ , 存在无穷多组重建满足要求. 如果没有任何先验知识, 不能够知道所求得的重建对应的是哪一个变换  $T$ , 从而这个重建落在射影空间而不是欧氏空间.

### 3 基于秩 1 的射影重建

为了表示方便, 令

$$\bar{m} = \frac{1}{m_{i=1}} m_{i,j} \quad (8)$$

定理 1 在无噪声的情况下, 存在一组重建  $P_i$  和  $X$ , 其中  $X = \begin{bmatrix} \bar{m} \\ w \end{bmatrix}$ ,  $w$  为任意维向量.

证明: 由前面可知, 当存在一组重建  $P_i$  和  $X$ , 同样也存在另一组重建  $P_i = P_i T^{-1}$  和  $X = T X$ , 令

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{i=1}} & \\ & P_i \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中  $\frac{1}{m_{i=1}}$  表示 Moore-Penrose 逆.

由式(7)可得

$$m_{i,j} = \underbrace{P_i}_{P_i} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{m_{i=1}} & \\ & P_i \end{pmatrix}}_X X \quad (10)$$

将式(8)整理得

$$\bar{m} \frac{1}{m_{i=1}} m_{i,j} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{i=1}} & \\ & P_i \end{pmatrix} X \quad (11)$$

将  $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{i=1}} & \\ & P_i \end{pmatrix} X$  代入上式得

$$\bar{m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{i=1}} & \\ & P_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{m_{i=1}} & \\ & P_i \end{pmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} X \quad (12)$$

由式(12)可得, 射影空间结构点  $X$  可以写成如下形式

$$X = \begin{bmatrix} \bar{m} \\ w \end{bmatrix} \quad (13)$$

证毕

定理 2 在无噪声的情况下, 存在一组射影重建  $P_i$  和

$X$ , 其中  $X = \begin{bmatrix} \bar{m} \\ s \end{bmatrix}$ , 且  $s^T = \mathbf{0}_{1 \times 3}$ .

证明:

对于任意向量  $w$  都可以分解成如下形式

$$w = \mathbf{1}_{3 \times 1} \bar{m} + s \quad (14)$$

且

$$s^T = \mathbf{0}_{1 \times 3} \quad (15)$$

由定理 1 可知, 射影空间结构点  $X$  可以为

$$X = \begin{bmatrix} \bar{m} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 \times 3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{1}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{m} \\ s \end{bmatrix} \quad (16)$$

令  $T = \begin{bmatrix} I_3 \times 3 & \mathbf{0}_{3 \times 1} \\ \mathbf{1}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}$ , 对于所有图像点, 由式(6)得

$$m_{i,j} = P_i \left( T \begin{bmatrix} \bar{m} \\ s \end{bmatrix} \right) = (P_i T) \begin{bmatrix} \bar{m} \\ s \end{bmatrix} \quad (17)$$

令  $P_i = P_i T$ , 式(17)化为

$$m_{i,j} = P_i \begin{bmatrix} \bar{m} \\ s \end{bmatrix} \quad (18)$$

因此, 存在一组重建  $P$  和  $X$ , 其中  $X = \begin{bmatrix} \bar{m} \\ s \end{bmatrix}$ , 且  $s^T = \mathbf{0}_{1 \times 3}$ .

证毕

将所有的  $m_i$ ,  $P_i$ ,  $\frac{1}{m_{i=1}}$  及  $s$  写成一个矩阵的形式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 1 \\ m_2 & 2 \\ \dots \\ m_m & m \end{bmatrix}}_{R_{3m \times m}} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_m \end{bmatrix}}_{P_{3m \times 4}} \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{m} \\ s \end{bmatrix}}_{X_{4 \times n}} \quad (19)$$

式中  $s^T = \mathbf{0}_{1 \times 3}$ .  $R$  为  $3m \times n$  的矩阵, 在无噪声的情况下,  $R$  的秩为 4.

如果深度矩阵  $\frac{1}{m_{i=1}}$  已知, 由式(8)可知  $\bar{m}$ , 即射影空间结构点  $X$  的前 3 行可以知道, 那么式(19)可以通过因式分解秩为 1 的矩阵, 而不是秩为 4 的矩阵.

令  $P = [Q_{3m \times 3} \ q_{3m \times 1}^T]$  (20)

式中矩阵  $Q$  为投影矩阵  $P$  的前 3 列.

将式(20)代入式(19), 得

$$R_{3m \times n} = P_{3m \times 4} \begin{bmatrix} \bar{m} \\ s \end{bmatrix} = Q \bar{m} + q^T s \quad (21)$$

对式(21)右乘矩阵  $\bar{m}^T$ , 并将式(15)代入式(21), 整理得

$$Q = R \bar{m}^T (\bar{m} \bar{m}^T)^{-1} \quad (22)$$

将式(22)代入式(21)中,整理得

$$R(I - m^{-T}(mm^{-T})^{-1}m) = q_{3m \times 1}^T s_{1 \times n} \quad (23)$$

令  $\tilde{R}_{3m \times n} = R(I - m^{-T}(mm^{-T})^{-1}m) \quad (24)$

在无噪声的情况下,  $\tilde{R}$  的秩为 1. 可以通过对  $\tilde{R}$  进行奇异值分解(SVD)求到左特征向量  $q$  和右特征向量  $s$ . 若  $s$  已知, 通过式(13)可以求到射影空间结构点  $X$ . 若  $X$  已知, 通过式(2)求到深度因子  $i$ .

### 4 迭代算法

通过以上分析,可以构造一个线性迭代射影重建算法,具体步骤如下:

- (1) 假设所有的深度因子都为 1, 令  $\epsilon$  为任意小的正数,  $k = 1$ ;
- (2) 利用式(24), 对矩阵  $\tilde{R}$  进行 SVD 分解, 求解右特征值  $s^{(k)}$ ;
- (3) 利用式(19)求解到射影空间结构点  $X$ ;
- (4) 利用式(2)求到深度因子  $i_j$ , 即  $i_j (j = 1, 2, 3, \dots, m)$ , 若  $|s^{(k)} - s^{(k-1)}| < \epsilon$ , 则  $k = k + 1$  并转至第 2 步, 否则至第 5 步;
- (5) 利用式(6)求到投影矩阵  $P_i$ , 最后完成射影重建.

### 5 模拟与真实图像实验

#### 5.1 模拟实验

为了检验本文提出的射影重建方法的收敛性,在单位球内随机产生 200 个空间点,并假设摄像机为针孔模型产生 8 幅大小为  $640 \times 480$  的图像,并在每幅图像中加入高斯噪声. 利用这些模拟图像点用本文提出的方法进行射影重建,模拟实验结果如图 1 所示,其中横坐标轴为迭代次数,纵坐标轴为重投影误差,其定义如下

$$= \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n |P_i X_j - m_{ij}| \quad (25)$$

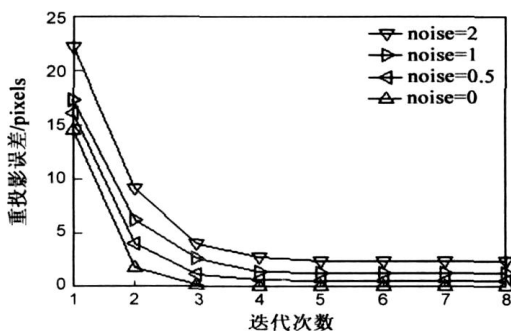


图1 重投影误差随迭代次数变化图

从图 1 可以看出,本文提出的射影重建方法迭代 5 次以内就能够收敛,因此该方法具有良好的收敛性.

同时,为了研究图像数对本文方法的影响,本文用上述方法模拟产生 2 至 16 幅图像,并在每幅图像中加

入 1 个像素的高斯噪声,在不同图像数下各进行 100 次实验,利用式(25)求取重投影误差,然后取均值,实验结果如图 2 所示. 从图 2 可以看出,随着图像数的增加,重投影误差会增大,而且增加的速度越来越慢,最后达到稳定.

为了比较本文方法和 Heyden 的子空间射影重建方法<sup>[9]</sup>及 Sturm 的分解方法<sup>[6]</sup>的重建性能,利用上述方法产生 8 幅图像,在图像像素中加入高斯噪声,并在每种噪声水平下用上述三种射影重建方法各进行 100 次实验,然后取均值,实验结果如图 3 所示.

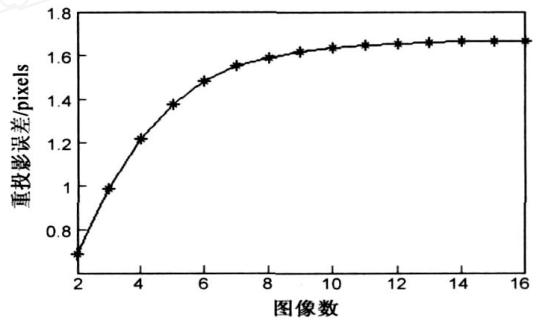


图2 重投影误差随图像数变化图

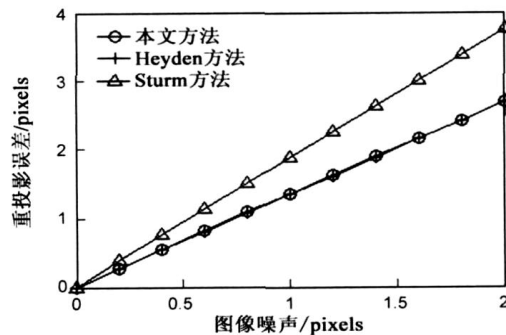


图3 重投影误差随图像噪声变化图

从图 3 中可以看,Sturm 方法的重投影误差较大,比图像噪声约大于 80%,原因是由于它在进行因式分解之前,图像点的深度因子的求解要利用对极几何约束关系,这样导致图像并没有平等地看待,而是倚重某几幅图像. 而本文方法和 Heyden 方法平等地看待了所有图像,因此具有较小的重投影误差. 从图 3 中还可以看出,本文方法和 Heyden 方法的重投影误差基本接近,在 2 个像素噪声以内,重投影误差只比原来的图像的噪声约大于 35%.

#### 5.2 真实图像实验

为了验证本文方法的正确性及重建效果,本文获得一个由 10 幅图像组成的房子序列,图像的大小为  $512 \times 480$ ,其中两幅图像如图 4 所示. 本文用 Harris 算子提取并跟踪了 90 个特征点(如图 4 中 + 所示),并利用这些特征点进行射影重建. 为了显示重建效果,本文将重建后的三维空间点重投影到原来图像中,重投影点如图 4

中 所示.

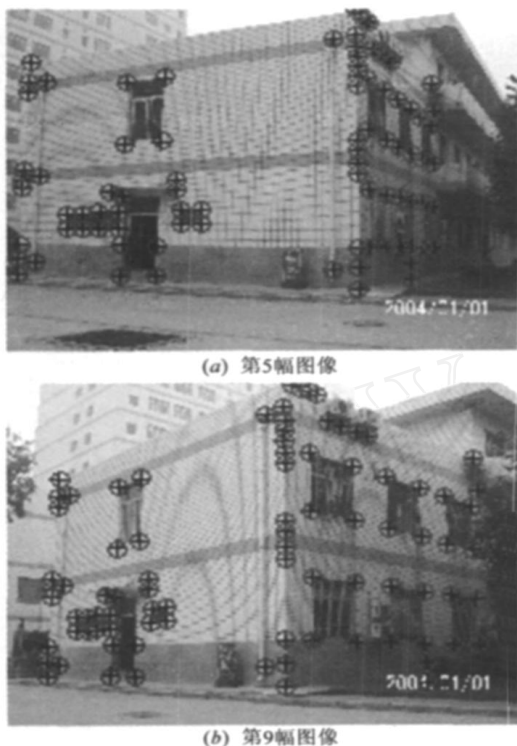


图4 图像的特征点(+)及重投影点(O)

从图中可以看出,重投影点(O)和特征点(+)基本重合.同时,利用式(25)求到平均重投影误差为0.29个像素,因此本文提出的射影重建方法具有较小的重投影误差,也说明该方法具有较好的重建效果.

## 6 结束语

本文利用射影空间结构点可以由图像点及深度因子构成的特性,构造了一个秩为1的矩阵,利用该矩阵用线性迭代的方法求取空间结构点的深度因子,最后完成射影重建.该方法能够平等地看待所有图像,并没有倚重某些图像.模拟实验结果表明,该射影重建方法只需要5次以内迭代就可以达到收敛,重投影误差约大于图像噪声的35%,因此,该射影重建方法具有收敛性好、重投影误差小及运行速度快等优点.同时,真实图像实验结果表明,本文提出的射影重建算法是非常有效的.

## 参考文献:

- [1] T Thormahlen, H Broszio, P Mikulastik. Robust linear auto-calibration of a moving camera from image sequences[A]. Lecture notes in Computer Science[C]. Beijing: Springer-Verlag, 2006, 3852: 71 - 80.
- [2] R Hartley, A Zisserman. Multiple View Geometry in Computer Vision[M]. Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 2000.
- [3] R Vidal, Y Ma, S Soatto, et al. Two-view multibody structure

from motion [J]. International Journal of Computer Vision, 2006, 68(1): 7 - 25.

- [4] D Martinec, T Pajdla. Structure from many perspective images with occlusions[A]. ECCV, Lecture notes in Computer Science [C]. Berlin: Springer-Verlag, 2002, 2351: 355 - 369.
- [5] C Tomasi, T Kanade. Shape and motion from image streams under orthography: a factorization method [J]. International Journal of Computer Vision, 1992, 9(2): 137 - 154.
- [6] P Sturm, B Triggs. A factorization based algorithm for multi-image projective structure and motion [A]. ECCV, Lecture notes in Computer Science [C]. Cambridge: Springer-Verlag, 1996, 1064: 709 - 720.
- [7] S Liu, C Wu, L Tang, et al. An iterative factorization method based on rank 1 for projective structure and motion[J]. The IEEE Transactions on Information and Systems, 2005, E88-D(9): 2183 - 2188.
- [8] 刘侍刚, 吴成柯, 李良福, 宁纪锋. 基于1维子空间线性迭代射影重建[J]. 电子学报, 2007, 35(4): 692 - 696.  
Liu Shigang, Wu Chengke, Li Liangfu, et al. An iterative method based on 1D subspace for projective structure and motion[J]. Acta Electronica Sinica, 2007, 35(4): 692 - 696. (in Chinese)
- [9] A Heyden, R Berthilsson, G Sparr. An iterative factorization method for projective structure and motion from image sequences[J]. Image and Vision Computing, 1999, 17(13): 981 - 991.

## 作者简介:



刘侍刚 男. 1973年11月出生于江西峡江, 1997年和2001年在哈尔滨工程大学分别获得学士学位和硕士学位, 2005年在西安电子科技大学获得博士学位, 现为西安交通大学博士后. 从事计算机视觉、图像处理、三维重建等方面的有关研究.

E-mail: shgliu@gmail.com



彭亚丽 女. 1979年3月出生于陕西石泉, 2005年在哈尔滨工程大学获得硕士学位, 现为西安电子科技大学综合业务网国家重点实验室博士研究生. 从事图像处理、智能计算等方面的有关研究.

E-mail: pengyali@gmail.com

韩崇昭 男. 教授、博士生导师. 1943年出生于陕西西安. 主要从事信息融合与图像融合、图像处理、计算机视觉等方面的研究工作.

吴成柯 男. 教授、博士生导师. 1938年出生于安徽黄山. 主要从事计算机视觉、三维重建、图形图像处理、视频编码和图像通信等方面的研究工作.